Aufgabe 1: Es seien $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, ... , $\overrightarrow{OP_n}$ Einheitsvektoren in der Ebene, die alle auf der gleichen Seite einer durch O gehenden Geraden liegen. Man beweise, dass für ungerades n

$$\mid \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_n} \mid \geq 1$$

gilt, wobei $\mid \overrightarrow{OP} \mid$ die Länge des Vektors $\overrightarrow{OP}$ bezeichnet.

Lösung: O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Punkte $\overrightarrow{OP_i}$ auf dem Halbkeis mit ansteigenden Winkel zu $\overrightarrow{OE}$ angeordnet seien, wobei E ein von O verschiedener Punkt auf der gegebenen durch O gehenden Geraden ist. Für beliebige $1 \leq i, j \leq n$ liegt $\overrightarrow{OP_i} + \overrightarrow{OP_j}$ auf der Winkelhalbierenden zwischen $\overrightarrow{OP_i}$ und $\overrightarrow{OP_j}$. Daher bildet jeder zwischen $\overrightarrow{OP_i}$ und $\overrightarrow{OP_j}$ liegender Winkel $\overrightarrow{OP_s}$ mit $\overrightarrow{OP_i} + \overrightarrow{OP_j}$ einen spitzen oder rechten Winkel. Wir setzen $n = 2k + 1$. Daher gilt für das Skalarprodukt

$$\overrightarrow{OP_s} \cdot (\overrightarrow{OP_i} + \overrightarrow{OP_j}) \geq 0$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OP_k} \cdot (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{2k-1}}) \\ = \; & \overrightarrow{OP_k} \cdot (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_{2k-1}}) + \overrightarrow{OP_k} \cdot (\overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_{2k-2}}) + .. + \\ & \overrightarrow{OP_k} \cdot (\overrightarrow{OP_{k-1}} + \overrightarrow{OP_{k+1}}) + \overrightarrow{OP_k}^2 \\ \geq \; & \overrightarrow{OP_k}^2 = 1 \end{aligned}$$

Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{OP_k} \cdot (\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{2k-1}}) \\ \leq \; & \mid \overrightarrow{OP_k} \cdot \mid (\mid \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... \\ & + \overrightarrow{OP_{2k-1}} \mid) \\ = \; & \mid \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_{2k-1}} \mid \end{aligned}$$

Daher folgt insgesamt

$$\mid \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + ... + \overrightarrow{OP_n} \mid \geq 1$$